Agrégation interne 1995 de Mathématiques seconde composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

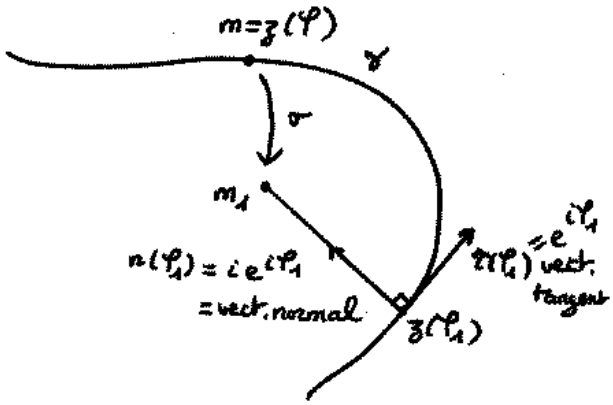
[0] [ag34s] v1.00

© 2002, D.-J. Mercier. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$\varphi \longmapsto z(\varphi)$

$\gamma(\varphi) = e^{i\varphi}$

$z'(\varphi) = R(\varphi)\,\gamma(\varphi) = R(\varphi)\,e^{i\varphi}$



I.A.1

- Dire que m_1 est centre de courbure de γ au point $z(\varphi_1)$ signifie que, en notant $n(\varphi_1) = i e^{i\varphi_1}$ la normale en $z(\varphi_1)$ à γ :

$$\overrightarrow{z(\varphi_1)m_1} = R(\varphi_1) \cdot n(\varphi_1)$$
$$= \frac{z'(\varphi_1)}{e^{i\varphi_1}} \cdot i e^{i\varphi_1}$$

$$\boxed{m_1 = z(\varphi_1) + i\, z'(\varphi_1)}$$

- <u>Relation entre φ et φ_1</u> : Toute similitude directe admet l'écriture complexe $\sigma(z) = uz + v$ avec $(u, v) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Dire qu'il existe une similitude directe tq $\sigma(\gamma)$ soit la développée de γ équivaut donc à dire :

$\exists (u, v) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ $\quad \forall \varphi \quad m_1 = \sigma(z(\varphi)) = u z(\varphi) + v$

$\exists u, v \quad \forall \varphi \quad u z(\varphi) + v = z(\varphi_1) + i z'(\varphi_1) \qquad (1)$

En dérivant :

$\exists u \quad \forall \varphi \quad u z'(\varphi) = z'(\varphi_1)\varphi_1' + i z''(\varphi_1) \cdot \varphi_1'$

$u z'(\varphi) = \cancel{R(\varphi_1) e^{i\varphi_1}} \varphi_1' + i \left(R'(\varphi_1) e^{i\varphi_1} + \cancel{R(\varphi_1) i e^{i\varphi_1}} \right) \varphi_1'$

$\exists u \quad \forall \varphi \quad u R(\varphi) e^{i\varphi} = i R'(\varphi_1) e^{i\varphi_1} \varphi_1' \qquad (2)$

On remarque que (2) $\Leftrightarrow$ (1). En effet, si (2) a lieu, les dérivées des fonctions $u\,\gamma(\varphi)$ et $\gamma(\varphi_1)+i\,\gamma'(\varphi_1)$ sont égales et donc ces fonctions diffèrent d'une constante $w \in \mathbb{C}$.

Conclusion : Il existe une similitude directe σ transformant l'arc γ en sa développée ssi $\exists u \in \mathbb{C}\ \forall \varphi \in \mathbb{R}$ $\quad u R(\varphi) e^{i\varphi} = i R'(\varphi_1) e^{i\varphi_1} \cdot \varphi_1'$ (2)

I.A.2

$$(2) \Rightarrow \quad R'(\varphi_1) = -iu\,\frac{R(\varphi)}{\varphi_1'}\,e^{i(\varphi-\varphi_1)}$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_1'(\varphi) \neq 0$ (on remarque qu'il y a au plus un nombre fini de points φ où φ_1' s'annule. En effet, $\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{d\gamma}{d\varphi_1}\cdot\varphi_1'(\varphi)$ et $\gamma'(\varphi)$ s'annule en un nombre fini de points par hypothèse)

Posons
$$\begin{cases} -iu = \rho\, e^{i\theta} & \rho \in \mathbb{R}^*,\ \theta \in \mathbb{R} \\ \varphi = \varphi_1 + \beta(\varphi) & (\text{où } \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable}) \end{cases}$$

On obtient

$$R'(\varphi_1) = \rho\,\frac{R(\varphi)}{\varphi_1'}\,e^{i(\beta(\varphi)+\theta)} \qquad (3)$$

Comme $R'(\varphi_1)$ et $\rho\,\frac{R(\varphi)}{\varphi_1'}$ sont réels, on aura (sauf peut-être sur un nombre fini de points φ) :

$$e^{i(\beta(\varphi)+\theta)} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \beta(\varphi)+\theta \in \pi\mathbb{Z}$$

Comme $\varphi \longmapsto \beta(\varphi)+\theta$ est continue, cela entraîne que $\beta(\varphi)$ est constante (*) pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$. Soit $\beta(\varphi) \equiv \beta$. De $\varphi_1 = \varphi - \beta(\varphi) = \varphi - \beta$ on déduit $\varphi_1' = 1$, et comme $e^{i(\beta+\theta)} = \varepsilon \in \pm 1$, (3) devient

$$R'(\varphi_1) = \varepsilon\,\rho\,R(\varphi_1+\beta)$$

qui est bien de la forme demandée.

(*) en effet l'image de $\mathbb{R}$ par β continue sera connexe et incluse dans l'ensemble discret $\theta+\pi\mathbb{Z}$, donc un point)

I.A.3

Tout revient à montrer que, sous ces hypothèses, (2) a lieu pour une fonction $\varphi \mapsto \varphi_1$ dérivable adéquate et pour un certain $a \in \mathbb{C}$.
On a :

$$R'(\varphi) = a\, R(\varphi + \beta) \qquad (5)$$
$$R'(\varphi - \beta) = a\, R(\varphi)$$

Posons $\varphi_1 = \varphi - \beta$. On trouve :

$$i R'(\varphi_1) e^{i\varphi_1} \cdot \varphi_1' = i a R(\varphi) e^{i(\varphi - \beta)}$$
$$= i a e^{-i\beta} R(\varphi) e^{i\varphi}$$

et donc bien

$$i R'(\varphi_1) e^{i\varphi_1} \varphi_1' = u R(\varphi) e^{i\varphi} \qquad (2)$$

en posant $u = i a e^{-i\beta}$.

I.A.4

Avec ces définitions,

$$\begin{cases} R'(\varphi) = \beta'(t) \cdot a \\ R(\varphi + \beta) = \beta(a(\varphi + \beta)) = \beta(t + \lambda) \end{cases}$$

de sorte que (3) $R'(\varphi) = a\, R(\varphi + \beta)$ équivale à :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \beta'(t) = \beta(t + \lambda)$$

I.B.1

Une similitude indirecte est caractérisée par une écriture complexe de la forme $\sigma(z) = u\bar{z} + v$. On recommence comme en I.A.1 mais on obtient ici :

$$\exists u, v \quad \forall \varphi \qquad u\bar{z}(\varphi) + v = z(\varphi_1) + i z'(\varphi_1) \qquad (1')$$

$$\exists u \quad \forall \varphi \qquad u R(\varphi) e^{-i\varphi} = i R'(\varphi_1) e^{i\varphi_1} \cdot \varphi_1' \qquad (2')$$

I.B.2

Comme en I.A.2 :

$$(2') \Rightarrow R'(\varphi_1) = -iu \frac{R(\varphi)}{\varphi_1'} e^{i(-\varphi-\varphi_1)}$$

On pose $\begin{cases} -iu = \rho e^{i\theta} \\ -\varphi - \varphi_1 = \beta(\varphi) \end{cases}$

pour obtenir :

$$R'(\varphi_1) = \rho \frac{R(\varphi)}{\varphi_1'} e^{i(\beta(\varphi)+\theta)} \qquad (3')$$

ce qui entraîne $\sin(\beta(\varphi)+\theta) = 0$ partout sauf en un nombre fini de valeurs de φ, d'où $\beta(\varphi) + \theta \in \pi\mathbb{Z}$. Par continuité, $\beta(\varphi)$ sera une constante, soit $\beta(\varphi) = \beta$. On a $e^{i(\beta(\varphi)+\theta)} = \varepsilon \doteq \pm 1$, et $\varphi_1 = -\varphi + \beta$ entraîne $\varphi_1' = -1$, de sorte que (3') entraîne :

$$R'(\varphi_1) = -\varepsilon \rho R(-\varphi_1 - \beta)$$

Cette dernière relation a la forme désirée par l'énoncé.

I.B.3 Supposons $R'(\varphi_1) = a\,R(-\varphi_1+\beta)$.

Comme en I.A.3 : on pose ici $\varphi \doteq -\varphi_1+\beta$ et l'on vérifie que (2') a bien lieu avec $u = -ia\,e^{i\beta} \in \mathbb{C}^*$.

I.B.4

$$R(\varphi) = f(a\varphi) \Rightarrow R'(\varphi) = a\,f'(a\varphi)$$

de sorte que :

$$R'(\varphi) = a\,R(-\varphi+\beta) \Leftrightarrow a\,f'(a\varphi) = a\,f(a(-\varphi+\beta))$$
$$\Leftrightarrow f'(a\varphi) = f(-a\varphi+a\beta)$$
$$\Leftrightarrow f'(t) = f(-t+\lambda) \quad \text{avec } \lambda \doteq a\beta$$

II.1.a

Comme $f'(t) = f(-t+\lambda)$, f' est dérivable et

$$f''(t) = -f'(-t+\lambda) = -f(-(-t+\lambda)+\lambda) = -f(t)$$

II.1.b

Résolvons l'équation différentielle $y''=-y$. On trouve :

$$y = A\cos(t-c) \qquad A, c \in \mathbb{R}$$

et I.B.4 montre l'existence de $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$R(\varphi) = f(k\varphi) = A\cos(k\varphi - c)$$

On a $k \neq 0$ et $A \neq 0$ (sinon $R(\varphi)=0$ $\forall\varphi \Rightarrow f'(\varphi)=0$ $\forall\varphi$ absurde).

II.1.c

$$z'(\varphi) = R(\varphi)\, e^{i\varphi} = A\cos(k\varphi - c)\, e^{i\varphi}$$

Faisons le changement de paramètre $\varphi - \frac{c}{k} = t$, pour obtenir

$$z'(\varphi) = A\cos kt\, e^{i(t+\frac{c}{k})}$$

On remarque que $\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dz}{dt}$, de sorte que $z'(t) = A\cos kt\, e^{i(t+\frac{c}{k})}$ et

$$z(t) = \int A\cos kt\, e^{it}\cdot e^{i\frac{c}{k}}\, dt$$

Puisque l'on travaille à une similitude près, on peut éliminer les constantes qui interviennent dans cette expression (*) de $z(t)$, et obtenir

$$z(t) = \int \cos kt\, e^{it}\, dt = \int \cos kt \cos t\, dt + i\int \cos kt \sin t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t)\, dt + \frac{i}{2}\int(\sin(k+1)t + \sin(1-k)t)\, dt \quad (*)$$

- 1er cas : Si $|k| \neq 1$, à une similitude près :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin(k+1)t}{k+1} + \dfrac{\sin(k-1)t}{k-1} \\ y(t) = -\dfrac{\cos(k+1)t}{k+1} - \dfrac{\cos(1-k)t}{1-k} \end{cases}$$

grâce à une homothétie de centre O et de rapport k^2-1 :

$$\begin{cases} x(t) = (k-1)\sin(k+1)t + (k+1)\sin(k-1)t \\ y(t) = (1-k)\cos(k+1)t + (k+1)\cos(1-k)t \end{cases}$$

En multipliant $x(t)$ par -1 (ie en effectuant une symétrie) puis en échangeant les rôles de $x(t)$ et $y(t)$ (encore une symétrie), on trouve bien

$$\begin{cases} x(t) = (1-k)\cos(1+k)t + (1+k)\sin(1-k)t \\ y(t) = (1-k)\cos(1+k)t + (1+k)\cos(1-k)t \end{cases}$$

((*) en effet, $z' = e^{i\frac{c}{k}} z$ est l'expression complexe d'une rotation tandis que $z' = Az$ est celle d'une homothétie. Ce sont toutes deux des similitudes.)

• 2ème cas : Si $k=1$, (*) devient

$$z(t) = \frac{1}{2}\int (\cos 2t + 1)\,dt + \frac{i}{2}\int \sin 2t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right) + \frac{i}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right) \qquad \text{à une constante près}$$

A une similitude près, on trouve

$$z(t) = \sin 2t + 2t - i\cos 2t$$

Par le changement de paramètre $t' = 2t$, puis en changeant $y(t)$ en $-y(t)$, puis en échangeant $x(t)$ et $y(t)$, on obtient comme précédemment

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t + t \end{cases}$$

• 3ème cas : Si $k=-1$, (*) devient

$$z(t) = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt + \frac{i}{2}\sin 2t\,dt$$

et les calculs sont identiques à ceux du 2ème cas. □

II.2.a

- f est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et T-périodique, donc la série de Fourier

$$\sum_{n\geq 0} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \qquad \text{où } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-in\frac{2\pi}{T}t} f(t)\,dt$$

converge uniformément vers f (Théorème de Dirichlet)

$f'(t) = f(t+\lambda)$ montre que f' sera aussi de classe C^1 comme composée de 2 fonctions de classe C^1, et T-périodique puisque la dérivée d'une fonction T-périodique. Le Théorème de Dirichlet montre comme ci-dessus que la série de Fourier

$$\sum_{n\geq 0} d_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \qquad \text{où } d_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-in\frac{2\pi}{T}t} f'(t)\,dt$$

converge uniformément vers f.

- Grâce à une intégration par parties :

$$d_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-in\frac{2\pi}{T}t} f'(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\left[e^{-in\frac{2\pi}{T}t} f(t)\right]_0^T - \int_0^T -in\frac{2\pi}{T} e^{-in\frac{2\pi}{T}t} f(t)\,dt\right)$$

$$d_n = in\frac{2\pi}{T} c_n$$

II.2.b $f'(t)=f(t+\lambda) \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n in\frac{2\pi}{T} e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}(t+\lambda)}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{Z} \quad c_n in\frac{2\pi}{T} = c_n e^{in\frac{2\pi}{T}\lambda}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{Z} \quad \left(i2\pi n - Te^{in\frac{2\pi}{T}\lambda}\right) c_n = 0$

d'après l'unicité des coefficients de Fourier.

II.2.c f est solution T-périodique de (1) ssi

$$\forall n \begin{cases} i2\pi n = Te^{in\frac{2\pi}{T}\lambda} \\ \text{ou} \\ c_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\pi n}{T} = e^{i\left(n\frac{2\pi}{T}\lambda - \frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi n}{T}=1 \text{ et } \frac{n2\pi}{T}\lambda - \frac{\pi}{2} = u2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{2\pi n}{T}=-1 \text{ et } \frac{n2\pi}{T}\lambda - \frac{\pi}{2} = \pi + u2\pi \end{cases}$$

(avec $u\in\mathbb{Z}$)

① Si $T\notin 2\pi\mathbb{N}$, alors $c_n=0$ pour tout n et la seule solution périodique de (1) est l'application nulle.

② Si $T\in 2\pi\mathbb{N}$, soit $T=2\pi m$ avec $m\in\mathbb{N}^*$ (car $T\neq 0$), f est solution T-périodique de (1) ssi

$$\begin{cases} \text{si } n\notin\{\pm m\} & c_n=0 \\ \text{si } n=m & c_m=0 \text{ ou } \lambda=\frac{\pi}{2}+u2\pi \quad (u\in\mathbb{Z}) \\ \text{si } n=-m & c_{-m}=0 \text{ ou } \lambda=\frac{\pi}{2}+u2\pi \quad (u\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Par suite :

(α) Si $\lambda\notin \frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$, seule l'appl. nulle est solution T-périodique de (1).

(β) Si $\lambda=\frac{\pi}{2}+u2\pi$ avec $u\in\mathbb{Z}$, il existe une solution T-périodique complexe de (1) différente de l'application nulle. C'est

$$f(t) = c_{-m}e^{-im\frac{2\pi}{T}t} + c_m e^{im\frac{2\pi}{T}t} = c_{-m}e^{-it} + c_m e^{it}$$

Les solutions réelles T-périodiques de (1) seront les parties réelles de telles solutions. Elles s'écrivent :

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(c_{-m}e^{-it} + c_m e^{it}\right) = \alpha\cos t + \beta\sin t \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

ou encore

$$\boxed{f(t) = A\cos(t-c)} \qquad A,c\in\mathbb{R}$$

II.2.d

• Si R est périodique, $\beta(t) = R\left(\frac{t}{a}\right)$ le sera aussi et vérifiera l'équation (1). D'après II.2.c, la seule application β périodique non nulle solution de (1) sera

$$\beta(t) = A \cos(t - c) \qquad A, c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$R(\varphi) = \beta(a\varphi) = A \cos(a\varphi - c)$$

NB : On tombe alors sur les mêmes arcs paramétrés qu'à la question II.1.

III.1.a La formule de Taylor appliquée au polynôme $P(Y) \in (\mathbb{C}[X])[Y]$ au point X s'écrit :

$$P(Y) = P(X) + P'(X)(Y-X) + \dots + \frac{P^{(i)}(X)}{i!}(Y-X)^i + \dots + \frac{P^{(n)}(X)}{n!}(Y-X)^n$$

En posant $Y = X + b_k$, on obtient :

$$P_k(X) = P(X+b_k) = \sum_{i=0}^{n} b_k^i \, \frac{P^{(i)}(X)}{i!}$$

(NB : autres démonstrations par récurrence sur $n = \deg P$, [U] Polynômes ou par Taylor sur la fct polynômiale.)

III.1.b On vérifie que le déterminant de $(P_0, \dots, P_n)$ dans la base $\left(\frac{1}{i!}P^{(i)}(X)\right)_{i \in \{0,\dots,n\}}$ est non nul. Ce déterminant est :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_0 & b_1 & & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & & b_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (b_j - b_i)$$

D est non nul car les b_i sont tous distincts deux à deux.

III.2.a On montre le résultat par récurrence sur $p = \dim F$.

• Si $p = 1$, $F = \mathrm{Vect}(f_1)$ est de dimension 1 et f_1 n'est pas identiquement nulle. Si l'on avait :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi_x \equiv 0$$

on aurait $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall g \in F \quad \Phi_x(g) = g(x) = 0$

et en particulier $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = 0$

ce qui est absurde. Donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que Φ_x ne soit pas identiquement nulle. De $\Phi_x \in F^* \setminus \{0\}$ et $\dim F^* = \dim F = 1$, on déduit $F^* = \mathrm{Vect}(\Phi_x)$, i.e. (Φ_x) est une base de F^*.

• Si $p \ge 1$, supposons la propriété démontrée pour $\dim F \le p-1$. Soit $F = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ de dimension p. Quitte à choisir une base de F dans le système générateur $f_1, \dots, f_n$ (cf Th. base incomplète),

on peut supposer $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ et $\dim F = p$.

Notons $(f_1^*, \dots, f_p^*)$ la base duale de $(f_1, \dots, f_p)$. On peut écrire :

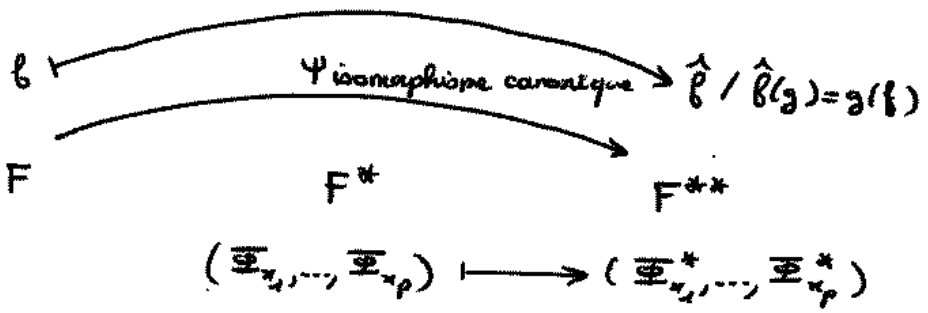
$$F^* = \text{Vect}(f_1^*, \dots, f_{p-1}^*) \oplus \text{Vect}(f_p^*) \qquad (*)$$

L'hypothèse récurrente au rang $p-1$ montre l'existence de $x_1, \dots, x_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Vect}(f_1^*, \dots, f_{p-1}^*) = \text{Vect}(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_{p-1}})$. Le pas $p=1$ précédent assure celle de $x_p \in \mathbb{R}$ avec $\text{Vect}(f_p^*) = \text{Vect}(\delta_{x_p})$. En remplaçant dans $(*)$:

$$F^* = \text{Vect}(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_p})$$

et comme $\dim F^* = p$, $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_p})$ sera bien une base de F^*.

III.2.b



- Le dessin ci-dessus introduit l'isomorphisme canonique de F sur F^{**},

$$\Psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F^{**} \\ f & \longmapsto & \hat{f} \ / \ \hat{f}(g) = g(f) \end{array}$$

On vérifie en effet que $\hat{f} \in F^{**}$ et que Ψ est un morphisme. Ψ est injectif car $f \in \ker \Psi \iff \forall g \in F^* \ g(f) = 0 \Rightarrow f = 0$. On est en dimensions finies, et l'on sait que

$$\dim F = \dim F^* = \dim F^{**}$$

de sorte que le morphisme $\Psi : F \to F^{**}$, injectif, sera bijectif.

• Définissons pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $g_i = \Psi^{-1}(\Phi_{x_i}^*)$. Ψ est un isomorphisme, donc transforme toute base en une base, donc $(g_1, \dots, g_p)$ sera une base de F.

On vérifie que la base duale de $(g_1, \dots, g_p)$ dans F^* est $(\Phi_{x_1}, \dots, \Phi_{x_p})$:

$$g_i = \Psi^{-1}(\Phi_{x_i}^*) \Leftrightarrow \Psi(g_i) = \Phi_{x_i}^*$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_p \quad \Psi(g_i)(\Phi_{x_j}) = \delta_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_p \quad \Phi_{x_j}(g_i) = \delta_{ij}$$

CQFD

III.2.c

Comme $(g_1, \dots, g_p)$ est une base de F, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$ il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}$ tq

$$f_i = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k g_k$$

En utilisant le fait que $g_j^* = \Phi_{x_j}$, on trouve successivement :

$$g_j^*(f_i) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \delta_{jk}$$

$$\Phi_{x_j}(f_i) = \alpha_j$$

$$f_i(x_j) = \alpha_j$$

ce qui permet de conclure à :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}_p \qquad f_i = \sum_{k=1}^{p} f_i(x_k)\, g_k}$$

III.2.d

• Si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ est libre, III.2.a à c montrent l'existence de n réels $x_1,\dots,x_n$ tels que $f_i = \sum_{k=1}^{n} f_i(x_k)\, g_k$ et où $\mathcal{B}=(g_1,\dots,g_n)$ est une base de F. Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(f_1,\dots,f_n) = \det\left(f_i(x_j)\right)_{i,j}$ sera donc non nul.

• Si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ est liée, l'un des vecteurs, par exemple f_n, s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs, soit

$$f_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i f_i$$

et $\det\left(f_i(x_j)\right)_{i,j} = 0$ pour tout choix de $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, la dernière ligne de ce déterminant étant combinaison linéaire des autres lignes. □

III.3 Si $f\in G$, alors $f = \sum_{i=1}^{m} k_i\, e^{\alpha_i t} P_i(t)$ avec $k_i\in\mathbb{C}$, $P_i\in\mathbb{C}[t]$ et $\alpha_i\in\mathbb{C}$ fixés.

$$E_f = \mathrm{Vect}\left\{ f_\lambda(t) = \sum_{i=1}^{m} k_i\, e^{\alpha_i(t+\lambda)} P_i(t+\lambda) \;/\; \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Posons $n = \mathrm{Max}\ \deg P_i$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $P_i(t+\lambda)$ est un polynôme de degré $\le n$ donc s'exprime comme combinaison linéaire de $\{1, t, \dots, t^n\}$. Par suite E_f est inclus dans l'espace vectoriel engendré par la famille finie $\left\{ e^{\alpha_i t} t^k \right\}_{\substack{1\le i\le m \\ 0\le k\le n}}$, et E_f sera à fortiori de dimension finie.

III.4.a III.2.d montre que $(f_{\lambda_1},\dots,f_{\lambda_n})$ étant libre, il existe $(t_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ telle que $\det\left(f_{\lambda_i}(t_j)\right)_{i,j} \neq 0$.
Pour ce choix des réels t_i, le système linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda)\, f_{\lambda_i}(t_j) = f_\lambda(t_j) \qquad j\in\mathbb{N}_n$$

d'inconnues $a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda)$ sera de Cramer, donc admettra une unique solution dans $\mathbb{C}^n$.

III.4.b Les formules de Cramer expriment chaque $a_i(\lambda)$ comme combinaison linéaire à coefficients complexes ne dépendant que des $f_{\lambda_i}(t_j)$, des $f_{\lambda}(t_j)$ $(1 \le j \le n)$. On a donc bien :

$$a_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} f_{\lambda}(t_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} f_{t_j}(\lambda)$$

et l'on peut égaler ces 2 fonctions en $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} f_{t_j}$$

Chaque a_i sera continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions f_{t_j} continues.

III.5.a En dérivant, compte tenu de $F'_{\lambda_i}(t) = f_{\lambda_i}(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i F_{\lambda_i}(t) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i f_{\lambda_i}(t) = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$$

puisque la famille $(f_{\lambda_1}, \dots f_{\lambda_n})$ est libre.

III.5.b

- $f_{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) f_{\lambda_i} \Rightarrow \int_0^t f(\lambda+u)\,du = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) F_{\lambda_i}(t)$ (*)
- On vient de voir que la famille $(F_{\lambda_i})_{i \in \mathbb{N}_n}$ est libre, donc (III.2.d) il existe une famille $(t'_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ de réels telle que $\det F_{\lambda_i}(t'_j)_{i,j} \neq 0$.

(*) représente alors un système de Cramer d'inconnues $a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda)$ et il existera des constantes μ'_{ij} ne dépendant que de i et j telles que :

$$a_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \mu'_{ij} \int_0^{t'_j} f(\lambda+u)\,du = \sum_{j=1}^{n} \mu'_{ij} \int_{\lambda}^{\lambda+t'_j} f(u)\,du$$

III.5.c

• Chaque fonction $\lambda \longmapsto \int_{\lambda}^{\lambda+t_j'} f(u)\,du$ est dérivable car f est continue, de dérivée $f(\lambda+t_j') - f(\lambda)$. La formule du III.5.b prouve alors que a_i est dérivable, et celle du III.4 montre que f_λ est dérivable. En effet :

(1) $f(\lambda+t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) f_{\lambda_i}(t) \Rightarrow f'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i'(\lambda) f_{\lambda_i}(0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ dérivable et $f'(\lambda) = \sum a_i'(\lambda) f_{\lambda_i}(0)$

• En dérivant (1) par rapport à λ : $f'(\lambda+t) = \sum_{i=1}^{n} a_i'(\lambda) f_{\lambda_i}(t)$, puis en faisant $\lambda = 0$ on trouve :

$$\boxed{f'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i'(0) f_{\lambda_i}(t)}$$

III.5.d

• $f' = \sum_{i=1}^{n} a_i'(0) f_{\lambda_i}$ exprime f' comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n})$ de E_f, donc $f' \in E_f$.

• Le raisonnement précédent appliqué à f' prouve encore que f' est dérivable et $f'' \in E_f$ (recommencer III.4 à III.5.c avec $f'_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i(\lambda) f_{\lambda_i}$). Par récurrence, on trouve $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• $(f, f', \dots, f^{(n)})$ est une famille de $n+1$ éléments d'un espace vectoriel E_f de dimension n. C'est donc une famille liée : il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, non tous nuls, avec

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{(i)} = 0 \qquad (E)$$

• Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre $\leq n$ à coefficients constants (E) sont de la forme

$$f = \sum_{k=1}^{K} e^{\mu_k t} \cdot P_k(t) \qquad P_k(t) \in \mathbb{C}[t]$$

de sorte que $f \in E_f$ et E_f de dimension finie entraîne $f \in G$.
On a déjà vu en III.3 que si $f \in G$, alors $\dim E_f < +\infty$.
Concluons :

$$\dim E_f < +\infty \iff f \in G.$$

IV.A.1

Posons $\varphi(x) = e^{\lambda x} - x$. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et si $\lambda \neq 0$:

$$\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1 = 0 \iff e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

Si $\lambda < 0$, cette équation n'a pas de solution, mais si $\lambda > 0$, alors

$$\varphi'(x) = 0 \iff x = -\frac{\ln \lambda}{\lambda}$$

d'où la discussion :

- Si $\lambda = 0$, $\varphi(x) = 1 - x$ s'annule ssi $x = 1$
- Si $\lambda > 0$, on a le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

et la discussion provient de :

$$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda} \leqslant 0 \iff \ln\lambda \leqslant -1 \iff \lambda \leqslant e^{-1}$$

* Si $0 < \lambda < \frac{1}{e}$, $\varphi(x) = 0$ admet 2 solutions distinctes
* Si $\lambda = \frac{1}{e}$, il existe une et une seule solution
* Si $\lambda > \frac{1}{e}$, $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution

- Si $\lambda < 0$, $\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et :

x	$-\infty$		$+\infty$
φ'		$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Dans ce cas, $e^{\lambda x} = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

IV.A.2.a

$g(u) = \dfrac{\sin u}{u} e^{u \operatorname{cotan} u}$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On calcule :

$$g'(u) = \frac{e^{u \operatorname{cotan} u}}{u^2 \sin u} \underbrace{\left(2u \sin u \cos u - \sin^2 u - u^2\right)}_{\neq h(u)}$$

h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $h'(u) = -4u \sin^2 u$, d'où les variations :

u	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$h(u)$ est donc toujours strictement négatif sauf en 0 où $h(0) = 0$.
On déduit :

$$\begin{cases} \operatorname{Sgn} g'(u) = -\operatorname{Sgn}(\sin u) \\ g'(u) \text{ ne s'annule jamais sur } \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

puis le tableau de variations de g que l'on complètera sachant que g est paire :

u	0		π		$2k\pi$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$	
g'	‖	$-$			$-$		$+$			
g	‖	e^{π}	$\searrow$		$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	

$k > 0$

On ne détaillera pas ces recherches de limite pendant le concours. Cependant, examinons le cas où $u \to 2k\pi_+$. Posons $t = u - k2\pi \to 0_+$.

$$g(u) = \frac{\sin t}{t + k2\pi} e^{(t+k2\pi)\operatorname{cotan} t} \underset{\sim}{\sim} \frac{\sin t}{k2\pi} \cdot e \cdot e^{k2\pi \operatorname{cotan} t}$$

$$\sim \cos t \cdot e \cdot \frac{e^{k2\pi \operatorname{cotan} t}}{k2\pi \operatorname{cotan} t} \to +\infty \quad (t \to 0_+)$$

IV.A.2.b

Posons $x = v + iu$, $u, v \in \mathbb{R}$.

$$e^{\lambda x} = x \iff e^{\lambda v}(\cos \lambda u + i \sin \lambda u) = v + iu$$

$$\iff \begin{cases} e^{\lambda v} \cos \lambda u = v \\ e^{\lambda v} \sin \lambda u = u \end{cases} \qquad (*)$$

Si $\lambda u \notin \pi\mathbb{Z}$,

$(*)$ entraîne $\operatorname{cotan} \lambda u = \dfrac{v}{u}$ donc $v = u \operatorname{cotan} \lambda u$ et par suite :

$$e^{\lambda u \operatorname{cotan} \lambda u} \sin \lambda u = u$$

$$g(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}$$

d'où la discussion :

α) Si $\lambda u \notin \pi\mathbb{Z}$, ie $u \notin \frac{\pi}{\lambda}\mathbb{Z}$, on vérifie que

$$e^{\lambda x} = x \iff (*) \iff \begin{cases} v = u \cotan \lambda u \\ g(\lambda u) = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Compte tenu du tableau de variations de g :

- Si $\lambda > 0$, il y a une infinité de solutions
- Si $\lambda < 0$, il n'y en a pas

β) Si $\lambda u \in \pi\mathbb{Z}$, $u = \frac{k\pi}{\lambda}$ $(k \in \mathbb{Z})$ et :

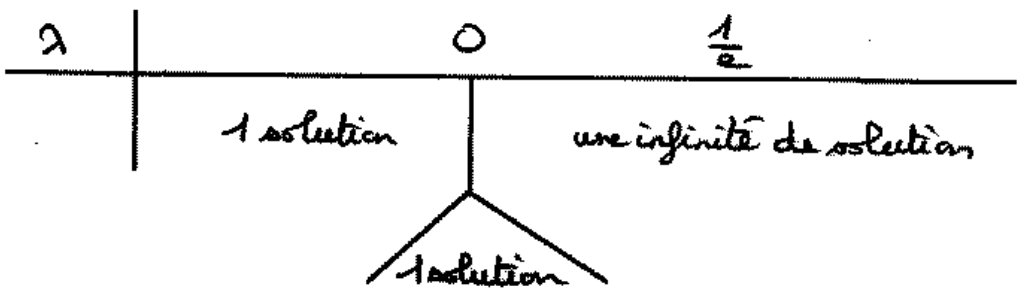
$$e^{\lambda x} = x \iff (*) \iff \begin{cases} e^{\lambda v} = v \\ u = 0 = k \end{cases}$$

Donc si $u \neq 0$, pas de solution possible. Mais si $u = 0$,

$$e^{\lambda x} = x \iff e^{\lambda v} = v$$

et l'on applique IV.A.1 :
- Si $\lambda \leq 0$, 1 seule solution
- ~~Si $\lambda = 0$, 1 seule solution~~
- Si $0 < \lambda < \frac{1}{e}$, 2 solutions
- Si $\lambda = \frac{1}{e}$, 1 seule solution
- Si $\lambda > \frac{1}{e}$, pas de solution.

Conclusion : Nombre de solutions $x \in \mathbb{C}$ de $e^{\lambda x} = x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$:



IV.B.1

On montre l'implication

$$a_1 P_1(t) e^{\alpha_1 t} + \dots + a_n P_n(t) e^{\alpha_n t} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dots = a_n = 0$$

par récurrence sur n.

- Si $n=1$, c'est trivial : $a_1 P_1(t) e^{\alpha_1 t} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ entraine $P_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc $P_1 = 0$ (en effet tout polynôme de $\mathbb{C}[t]$ de degré $d \in \mathbb{N}$ possède au plus d racines).

- Plaçons-nous au rang n et supposons

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad a_1 P_1(t) e^{\alpha_1 t} + \dots + a_n P_n(t) e^{\alpha_n t} = 0$$

alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad a_1 P_1(t) e^{\beta_1 t} + \dots + a_{n-1} P_{n-1}(t) e^{\beta_{n-1} t} + a_n P_n(t) = 0 \qquad (*)$$

où $\beta_i = \alpha_i - \alpha_n$ n'est pas nul pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$.

Soit d le degré de $P_n(t)$. En dérivant $d+1$ fois $(*)$, on trouve $P_n^{(d+1)} = 0$ et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(P_i(t) e^{\beta_i t} \right)^{(d+1)} = 0$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left[\sum_{k=0}^{d+1} C_{d+1}^{k} P_i^{(k)}(t) \cdot \beta_i^{d+1-k} \right] e^{\beta_i t} = 0$$

L'hypothèse récurrente entraine :

$$\forall i \in \mathbb{N}_{n-1} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad a_i \sum_{k=0}^{d+1} C_{d+1}^{k} P_i^{(k)}(t) \beta_i^{d+1-k} = 0 \qquad (**)$$

Si $\deg P_i = d_i$, alors le système $(P_i, P_i', \dots, P_i^{(d_i)})$ est libre (puisque les degrés de ces polynômes sont tous différents 2 à 2) et $P_i^{(d_i+1)} = P_i^{(d_i+2)} = \dots = 0$, la relation $(**)$ entraine donc toujours, pour $k=0$: $a_i \beta_i^{d+1} = 0$ donc $a_i = 0$.

Ainsi $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, et $a_n = 0$.

La récurrence aboutit □.

IV.B.2.a

- $\beta(t+\lambda) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t+\lambda)\, e^{\alpha_i(t+\lambda)}$

Comme $P_i(t+\lambda) = \sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j \frac{P_i^{(j)}(t)}{j!}$. d'après III.1.a, on obtient

$$\beta(t+\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{d_i} \lambda^j \frac{P_i^{(j)}(t)}{j!} e^{\alpha_i \lambda} \right) e^{\alpha_i t} = \sum_{i=0}^{n} Q_i(t)\, e^{\alpha_i t}$$

avec des notations évidentes, et avec $d_i = \deg P_i$.

- $\beta'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(P_i'(t)\, e^{\alpha_i t} + \alpha_i P_i(t)\, e^{\alpha_i t} \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[P_i'(t) + \alpha_i P_i(t) \right] e^{\alpha_i t}$$

IV.B.2.b

$$\beta'(t) = \beta(t+\lambda) \iff \sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\, e^{\alpha_i t} = \sum_{i=1}^{n} \left(P_i'(t) + \alpha_i P_i(t) \right) e^{\alpha_i t}$$

$$\iff \forall i \in \mathbb{N}_n \qquad Q_i(t) = P_i'(t) + \alpha_i P_i(t)$$

d'après le lemme :

<u>lemme</u> : $\sum_{i=1}^{n} L_i(t)\, e^{\alpha_i t} = 0 \implies \forall i \;\; L_i$ est le polynôme nul

preuve : Si l'un des polynômes $L_i(t)$ n'est pas nul, cette égalité montre que le système $\{ L_i(t)\, e^{\alpha_i t} \}_{i \in \mathbb{N}_n, L_i \neq 0}$ est lié, ce qui contredit IV.B.1

□

IV.B.2.c

$(P_i, P_i', \dots, P_i^{(d_i)})$ est une base de $\mathbb{C}_{d_i}[t]$ convenable de polynômes de degrés étagés. L'égalité du IV.B.2.b aura donc lieu ssi

$$(C) \qquad \forall i \in \mathbb{N}_n \quad \begin{cases} \alpha_i = e^{\alpha_i \lambda} \\ 1 = \lambda e^{\alpha_i \lambda} \qquad (\text{si } d_i = 1) \\ \forall j \in [\![2, d_i]\!] \quad e^{\alpha_i \lambda} \cdot \dfrac{\lambda^j}{j!} = 0 \qquad (\text{si } d_i \geq 2) \end{cases}$$

Si $d_i \geq 2$, $e^{\alpha_i \lambda} \dfrac{\lambda^j}{j!} = 0$ pour $j = 2$ entraîne $\lambda = 0$ donc $f'(t) = f(t)$, donc $f(t) = \text{cte}\, e^t$, $n = 1$ et $\deg P_i = 0$, absurde.

Donc $d_i \leq 1$ et les conditions (C) deviennent :

$$(C) \qquad \forall i \in \mathbb{N}_n \quad \begin{cases} \alpha_i = e^{\alpha_i \lambda} \\ (\lambda e^{\alpha_i \lambda} - 1) P_i'(t) = 0 \\ \deg P_i \leq 1 \end{cases}$$

IV.B.3

Les solutions de (2) dans $\mathcal{C}$ s'écrivent $f(t) = \sum P_i(t) e^{\alpha_i t}$ avec des polynômes P_i vérifiant (C), ie

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} (a_i' t + b_i') e^{\alpha_i' t} + \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i t} \qquad (a_i' \neq 0)$$

On a :

$$\begin{cases} \alpha_i' = e^{\alpha_i' \lambda} \\ \lambda e^{\alpha_i' \lambda} = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \alpha_i = e^{\alpha_i \lambda}$$

donc :

1) Si $\lambda = 0$, il n'y a pas de termes en $e^{\alpha_i' t}$ et

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i t} \qquad \text{avec } \alpha_i \text{ solution de } e^{\lambda \alpha_i} = \alpha_i$$

(voir IV.A.1)

Dans ce cas, $\beta'(t) = \beta(t)$ se résout en $\boxed{\beta(t) = c\, e^{t}}$

2) Si $\lambda \neq 0$,

$$\begin{cases} \alpha_i' = e^{\alpha_i' \lambda} \\ \lambda e^{\alpha_i' \lambda} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_i' = \frac{1}{\lambda} \\ \alpha_i' = e^{\alpha_i' \lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i' = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i' = e \\ \lambda = \frac{1}{e} \end{cases}$$

donc 2 cas : α) Si $\lambda \neq 1/e$ alors β est de la forme

$$\boxed{\beta(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i t}}$$

avec α_i racine de $e^{\lambda \alpha_i} = \alpha_i$ (cf IV.A.1)

β) Si $\lambda = \frac{1}{e}$,

$$\boxed{\beta(t) = (at+b)\, e^{\alpha t} + \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i t}}$$

avec $\alpha = e$, et α_i racine de $e^{\lambda \alpha_i} = \alpha_i$.

IV.B.4

$f \in G \Rightarrow \bar{f} \in G \Rightarrow g = \mathrm{Re}\, f = \frac{f+\bar{f}}{2} \in G$ et g est une solution réelle.

Réciproquement, si g est sol. réelle dans G, alors $g = \mathrm{Re}\, g$. Ainsi :

Les solutions réelles dans G sont les parties réelles des solutions complexes dans G. Elles s'écrivent :

$$g = \mathrm{Re}\left[(at+b)e^{\alpha t} + \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\lambda_i t}\right] \qquad (*)$$

Posons $\alpha = u + iv$ et $\lambda_i = u_i + iv_i$. De façon générale $(*)$ donne :

$$g = (ct+d)e^{ut}\cos vt + (et+f)e^{ut}\sin vt + \sum_{i=1}^{n} g_i e^{u_i t}\cos v_i t + h_i e^{u_i t}\sin v_i t$$

En fait, avec IV.B.3 :

- Si $\lambda = 0$, $f(t) = ce^t$
- Si $\lambda = \frac{1}{e}$, $f(t) = (ct+d)e^{et} + \sum_{i=1}^{n}(g_i \cos v_i t + h_i \sin v_i t)e^{u_i t}$
- Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{e}\}$, $f(t) = \sum_{i=1}^{n}(g_i \cos v_i t + h_i \sin v_i t)e^{u_i t}$

IV.C

- Si $\beta(t) = a e^{\alpha t} \cos \alpha t$, $R(\varphi) = \beta(b\varphi) = a e^{\alpha b \varphi} \cos \alpha b \varphi$ et

$$z'(\varphi) = R(\varphi) e^{i\varphi}$$
$$= a e^{\alpha b \varphi} \cos \alpha b \varphi \cdot e^{i\varphi}$$

Écrivons $\beta = \alpha b$ pour simplifier, et $\varphi = t$. On trouve :

$$z'(t) = a e^{\beta t} \cos \beta t \cdot e^{it}$$
$$z(t) = a \int \cos \beta t \cdot e^{(\beta+i)t} \, dt \qquad (*)$$

Calcul de $I = \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt \quad (\alpha \in \mathbb{C}^* \text{ et } \beta \in \mathbb{R})$

$$I = \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \cos \beta t \right] + \int \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \beta \sin \beta t \, dt$$
$$= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha t} \sin \beta t \, dt$$
$$= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} \left(\left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \sin \beta t \right] - \int \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \beta \cos \beta t \, dt \right)$$

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) I = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \cos \beta t + \frac{\beta e^{\alpha t}}{\alpha^2} \sin \beta t$$

$$I = \frac{(\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t) e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

En remplaçant dans $(*)$:

$$z(t) = a \frac{(\beta+i)\cos \beta t + \beta \sin \beta t}{(\beta+i)^2 + \beta^2} e^{(\beta+i)t}$$

Soit, à une similitude près :

$$z(t) = \left[(\beta+i)\cos \beta t + \beta \sin \beta t \right] e^{(\beta+i)t}$$

soit

$$\begin{cases} x(t) = (a \cos \beta t + b \sin \beta t) e^{\beta t} \cos t + (a' \cos \beta t + b' \sin \beta t) e^{\beta t} \sin t \\ y(t) = (c \cos \beta t + d \sin \beta t) e^{\beta t} \cos t + (c' \cos \beta t + d' \sin \beta t) e^{\beta t} \sin t \end{cases}$$

$a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$.

- Si $f(t) = (at+b)\,e^{\alpha t}$, $R(\varphi) = f(\lambda\varphi)$ et

$$\beta'(\varphi) = R(\varphi)\,e^{i\varphi} = (a\lambda\varphi + b)\,e^{\alpha\lambda\varphi}\cdot e^{i\varphi}$$

soit en changeant le nom des constantes et en prenant $\varphi = t$ comme variable :

$$\beta'(t) = (at+b)\,e^{\alpha t}\cdot e^{it}$$

$$\beta(t) = \int (at+b)\,e^{(\alpha+i)t}$$

Par intégration par parties :

$$\beta(t) = \left[(at+b)\,\frac{e^{(\alpha+i)t}}{\alpha+i}\right] - \int a\,\frac{e^{(\alpha+i)t}}{\alpha+i}\,dt$$

$$= \frac{1}{\alpha+i}\left[(at+b)\,e^{(\alpha+i)t} - \frac{a}{\alpha+i}\,e^{(\alpha+i)t}\right]$$

et à similitude près :

$$\beta(t) = \left[(\alpha+i)(at+b) - a\right]e^{\alpha t}\cdot e^{it}$$

En changeant les noms des constantes, on trouve finalement :

$$\begin{cases} x(t) = (at+b)\,e^{\alpha t}\cos t + (a't+b')\,e^{\alpha t}\sin t \\ y(t) = (ct+d)\,e^{\alpha t}\cos t + (c't+d')\,e^{\alpha t}\sin t \end{cases}$$

That's all Folks !